FORMALIZACIÓN MATEMÁTICA DEL MODELO ECONÓMICO SOCIAL COMUNITARIO PRODUCTIVO

David Quiroz S. y Luis Arce C.*

RESUMEN

Este trabajo tiene como propósito formalizar matemáticamente el Modelo Económico Social Comunitario Productivo, implementado en Bolivia desde 2006. Para dicho efecto, se desarrolla un modelo matemático basado en un modelo super-predador, en el cual se llega a una solución para el sistema mediante ecuaciones del tipo Lokta-Volterra. El modelo muestra que con el traspaso de excedentes económicos provenientes del sector estratégico hacia el sector generador de ingresos y empleo se puede generar crecimiento económico sostenido.

Clasificación JEL: C02, C61, P27

Palabras clave: Modelo Económico, Sistemas Dinámicos

* David Quiroz es Investigador sin afiliación y Luis Arce es Ministro de Economía y Finanzas Públicas de Bolivia. Enviar cualquier comentario a:

virrccad@gmail.com o luchoarce@hotmail.com

I. INTRODUCCIÓN

a. Modelo económico: Antecedentes

Después del comunismo primitivo, la historia de las sociedades y las clases sociales se resume en la lucha por la apropiación del excedente económico de la sociedad. Un modelo económico es el que define cómo se generan y se distribuyen los excedentes económicos entre los miembros de una sociedad. Un modelo económico involucra una forma de organizar la producción y la distribución, por lo tanto, una forma de organizar las relaciones sociales de producción. En la historia de la humanidad han existido varios modelos económicos bajo distintos modos de producción que han establecido relaciones sociales, también distintas. De la misma manera, dentro de un mismo modo de producción se han generado distintos modelos económicos de distribución del excedente sin eliminar las contradicciones fundamentales de estos modos de producción. Estas relaciones, alrededor de lo productivo y la apropiación del excedente, determinan la forma en que las sociedades se organizan en los aspectos jurídico, religioso y cultural, es decir la superestructura.

En Bolivia, el modelo neoliberal estuvo vigente por más de veinte años, desde la promulgación del Decreto Supremo N° 21060 del 29 de agosto de 1985. Este modelo se guiaba bajo los fundamentos de la apertura de la economía nacional al mundo, la liberalización de todas las actividades económicas y el supuesto del mercado como asignador eficiente de recursos. Este modelo basó el desarrollo de la economía en la demanda externa y la iniciativa privada, reduciendo al mínimo la participación del Estado.

Pero el aspecto más cuestionado de las medidas del modelo neoliberal en nuestro país fue, sin duda, la enajenación de los recursos naturales y la privatización de las empresas públicas, con el pretexto de mayor eficiencia. Esta apertura al capital extranjero trajo consigo la explotación de los recursos naturales por varias empresas transnacionales que establecieron monopolios en el país.

El modelo neoliberal era un modelo concentrador del ingreso, que no tomó en cuenta la abigarrada realidad socioeconómica del país y los modos de producción pre capitalistas que coexisten en Bolivia. Este modelo disminuyó el empleo formal y aumentó el informal, incrementó las diferencias económicas entre las distintas clases sociales, profundizando la extrema pobreza y los problemas sociales.

Durante la vigencia del modelo neoliberal, la generación de excedente y su distribución no era equitativa, ya que éste se concentraba en pocas manos, no solamente de nacionales sino también de extranjeros.

b. Bases del Modelo Económico Social Comunitario Productivo

El actual sistema capitalista enfrenta una crisis estructural nunca antes vista, que se manifiesta en 7 formas: crisis financiera, energética, climática, alimentaria, hídrica, institucional y de políticas macroeconómicas.

Este contexto de crisis puede convertirse en oportunidades para los bolivianos, puesto que el país cuenta con los recursos naturales para convertirse en un gran productor de energía y alimentos, y de diversos productos industriales derivados del gas, litio y otros.

Así, en 2005 surge un nuevo modelo económico consistente con la realidad socioeconómica del país, el cual fue plasmado en el Plan Nacional de Desarrollo de 2007. Este nuevo modelo se denomina Modelo Económico Social Comunitario Productivo (MESCP).

Las bases del MESCP son: i) crecimiento y desarrollo en base al aprovechamiento de los recursos naturales para beneficio de los bolivianos, ii) apropiación del excedente económico de los sectores estratégicos por parte del Estado, iii) redistribución del excedente económico entre los sectores más vulnerables y, iv) reducción de la desigualdad social y la pobreza.

En este marco, es importante que los sectores estratégicos generadores de excedente estén en manos del Estado (procesos de nacionalización)[25] para que

25 El proceso de nacionalización en Bolivia se inició el 1 de mayo de 2006, dado que en esa fecha el gobierno de Evo Morales aprobó el Decreto Supremo N° 28701, cuyo objeto fue recuperar la propiedad y el control absoluto de los hidrocarburos. Cabe destacar que como resultado del nuevo marco regulatorio instituido por la nacionalización, los ingresos fiscales por hidrocarburos se incrementaron en más del 100%. Posteriormente, se llevaron a cabo procesos de nacionalización en otros sectores estratégicos como la minería, telecomunicaciones y electricidad.

los excedentes sean redistribuidos entre los bolivianos, especialmente entre aquellos sectores más vulnerables y empobrecidos de la población. Cabe resaltar que este es un modelo esencialmente redistribuidor del ingreso[26].

c. Funcionamiento del Modelo Económico Social Comunitario Productivo

El MESCP identifica dos grandes sectores: i) el estratégico, que es donde se genera la mayor parte del excedente del país y ii) el sector generador de ingresos y empleo, que incluye sectores económicos potenciales que todavía no fueron desarrollados en su plenitud.

En este marco, el MESCP considera tres actividades estratégicas para generar excedentes económicos: hidrocarburos, minería y electricidad. Por otro lado, entre los sectores generadores de ingreso y empleo están la industria manufacturera, turismo, vivienda, desarrollo agropecuario y otros.

De acuerdo con el MESCP, para desarrollar una nueva Bolivia productiva y modificar el modelo primario exportador, se requiere llevar los excedentes de los sectores estratégicos hacia los sectores donde se requiere poner la piedra fundamental para un país productivo e industrializado, es decir, en el sector generador de ingresos y empleo. El ente encargado de llevar a cabo este proceso de redistribución es el Estado.

Si bien por un tiempo Bolivia seguirá siendo un país primario exportador, con el MESCP se tiene claro el perfil de país que se quiere construir. En otras palabras, lo que se busca es liberar a Bolivia de la dependencia de la exportación de materias primas para abandonar el modelo primario exportador y construir una Bolivia industrializada y productiva.

26 Las políticas de redistribución del ingreso, en el marco del MESCP, son las transferencias condicionadas en efectivo (Bono Juancito Pinto, la Renta Dignidad y el Bono Juana Azurduy), los incrementos salariales por encima de la tasa de inflación, el incremento del salario mínimo nacional, subvenciones cruzadas y otros.

En el marco del MESCP, se entiende que esta labor no puede hacerla el mercado[27], por lo que el Estado interviene como asignador de recursos y es quien tiene la tarea de conducir este modelo. Asimismo, el modelo no solo se enfoca en construir una Bolivia industrializada sino también busca resolver los problemas sociales de pobreza, desempleo y baja movilidad social.

Este modelo está diseñado para la economía boliviana y el éxito se basa en la buena administración estatal de los recursos naturales.

II. FORMALIZACIÓN MATEMÁTICA DEL MODELO ECONÓMICO SOCIAL COMUNITARIO PRODUCTIVO

a. Supuestos del Modelo

Explicado el marco anterior en el cual se desenvolverá la economía,[28] se inicia la especificación del modelo matemático enunciando los supuestos.

1. Sólo hay dos sectores que generan movimiento económico agregado: un sector estratégico (sector estatal) y un sector generador de ingreso y empleo (también denominado sector de valor agregado). La producción de estos sectores se denota con X_1 y X_2, respectivamente. El sector generador de ingreso y empleo está administrado por todos los actores del modelo.[29] A su vez, es importante hacer notar que tanto $X_1(t)$ y $X_2(t)$ son funciones del tiempo, pero para evitar un abuso de notación no se emplea el subíndice t o la forma funcional.

27 A causa de la crisis financiera que estalló en EEUU a mediados de 2008 y considerando que esta crisis se origina en el mercado financiero que es lo más cercano a la definición teórica de un mercado de competencia perfecta, muchos economistas señalaron que ésta puso en evidencia las fallas del mercado y las consecuencias cuando éste no se encuentra suficientemente regulado por el Estado.

28 Se debe aclarar que este modelo no se encuentra dentro de ningún marco teórico de la literatura económica.

29 Los actores de la economía son: el Estado, el sector privado, economía social cooperativa y la economía comunitaria.

2. En ambos sectores se generan excedentes[30], debido a que tanto en el sector estratégico, como en el sector generador de ingreso y empleo se encuentran actividades productivas. En consecuencia, de acuerdo a Villegas y Aguirre (1989), se asume que:

$$X_1 = XN_1 + XE_1 \tag{1}$$

$$X_2 = XN_2 + XE_2 \tag{2}$$

Donde, XN_i es el producto necesario del sector i y XE_i es el producto excedente del sector i, para todo $i = \{1, 2\}$.

3. El excedente del sector estratégico es exógeno, pero decreciente y se define mediante la siguiente función:

$$XE_1 = a_0 e^{-\gamma_1 t} \tag{3}$$

Donde, $a_0, \gamma_1 \in R^+$ ambas son constantes y $\frac{\dot{X}E_1}{XE_1} = -\gamma_1$

4. El sector estratégico cuya actividad implica la explotación de recursos no renovables debe considerar la restricción de recursos que la economía tiene, es decir: $\int_0^T r_t dt = R$. Donde R es la restricción de cantidad de recursos naturales del país expresada en términos de producción y r_t es la cantidad de recursos naturales extraídos en el tiempo. Por la regla de Hotelling[31] se tiene que $P_t = P_0 e^{it}$, donde P_t es el precio de las materias primas. La función de demanda de materias primas es $P_t = \psi_0 - \psi_1 r_t$, donde ψ_1 y $\psi_2 \in R^+$ son constantes. Resolviendo el sistema se encontrará el tiempo de duración y el precio inicial óptimo de extracción.[32]

30 De acuerdo a Villegas y Aguirre (1989) el excedente económico es la producción total menos el monto que se destina para remunerar al trabajo.

31 Ver Hotelling (1931) para más detalles.

32 Es importante señalar que este supuesto refuerza el supuesto anterior.

5. El excedente del sector generador de ingreso y empleo que corresponde al sector privado es exógeno, pero creciente y se define mediante la siguiente función:

$$XE_2^p = b_0 e^{\beta_0 t} \tag{4}$$

Donde, $b_0, \beta_0 \in R^+$ ambas son contantes y $\dfrac{\dot{X}E_2^p}{XE_2^p} = \beta_0$

6. El excedente del sector generador de ingreso y empleo que le pertenece al Estado, crece a una tasa constante definida por el mismo, es decir $\frac{\dot{X}E_2^e}{XE_2^e} = \sigma$.[33]

7. Se supone que existe una función definida del excedente total del sector generador de ingreso y empleo: $XE_2 = \left[XE_2^p\right]^{\tau_1}\left[XE_2^e\right]^{\tau_2}$, donde $0 < \tau_1 < 1$ y $0 < \tau_2 < 1 \in R^+$ son contantes. Estos parámetros muestran la participación de cada excedente en el excedente total. Por su parte, aplicando logaritmo neperiano y derivando en el tiempo se tiene:

$$\frac{\dot{X}E_2}{XE_2} = \tau_1\beta_0 + \tau_2\sigma = \beta_1$$

8. La demanda interna agregada en el modelo será un determinante para el crecimiento económico. A pesar de que la producción y la demanda interna agregada varían en el tiempo, la participación de la demanda interna en el producto será constante (tanto $D(t)$ y $Y(t)$ son funciones del tiempo, pero para evitar mucha notación no se lo denota). Tal participación está representada por la siguiente expresión:

$$\frac{D}{Y} = d \tag{5}$$

Donde, $d = cte \in R^+$ y $(0 < d < 1)$

33 Este parámetro se asume exógeno, ya que si se lo considera como endógeno, este tendría que ser una función del Gasto de Gobierno, lo que complicaría demasiado la obtención de la solución analítica.

9. La demanda interna será superior o igual al gasto del Estado redistribuidor, $D \geq G$, Este gasto $G(t)$ es una función del tiempo y favorece a la demanda interna por medio de la inversión pública, salarios y transferencias condicionales, entre otros.
10. El Estado interviene en la economía mediante gasto destinado a ambos sectores y a su vez realiza transferencias directas a los actores de la economía, para cumplir con sus objetivos de reducir la pobreza y la mala redistribución del ingreso.[34]
11. En cada período, el gasto del Estado se encuentra financiado en su totalidad por impuestos, sobre una parte del excedente capturado del sector estratégico y parte del sector generador de ingreso y empleo. Por tanto, el Estado siempre mantendrá una política de presupuesto equilibrado.
12. El excedente de la economía como participación del producto será constante.[35] Tal participación estará representada por la siguiente expresión:

$$\frac{XE}{Y} = h \tag{6}$$

Donde, $h = cte \in R^{+}$ y $(0 < h < 1)$.

b. Desarrollo del Modelo

Como se mencionó en los supuestos 1 y 10, al Estado le preocupa el desenvolvimiento de la producción de cada sector en la economía. El Estado se fija como objetivos alcanzar un nivel de producción en cada período de tiempo X_1^* y X_2^*. Para simplificar el análisis es posible suponer que la

34 Es importante mencionar que no es el objetivo del trabajo modelar a los agentes económicos (e.g. los hogares), por lo que no es necesario realizar una caracterización formal de la pobreza y los problemas de redistribución.

35 Este supuesto establece el excedente total de la economía en relación al producto, solo se debe identificar cuál de los actores de la economía se apropia de este. Para este modelo el Estado tiende a controlar de alguna forma el excedente, con impuestos al sector privado o de forma completa al incursionar en los sectores de la economía.

producción efectiva en cada sector será igual que la producción objetivo, es decir, $X_1^* = X_1$ y $X_2^* = X_2$.

Mientras mayores sean los niveles efectivos de producción de cada sector, o lo que es equivalente, mientras mayores sean los niveles de producción objetivo de cada sector, el Estado recibe mayores niveles de satisfacción. Por tanto, existe una función de utilidad que representa las preferencias del Estado respecto a la producción de cada sector, tal función es modelada de la siguiente forma:

$$U\left(X_1, X_2\right) = X_1^{\alpha_1} X_2^{\alpha_2} \tag{7}$$

Donde, α_1 y $\alpha_2 \in R^+$ son constantes.

El Estado puede influir en la producción de cada sector mediante el gasto. A su vez, como Estado redistribuidor, para financiar estos gastos debe obtener ingresos, tales ingresos son recaudados mediante impuestos proporcionales sobre la producción agregada de cada sector.

En este marco, se debe considerar que mayores niveles de gasto implican mayores tasas impositivas sobre la producción agregada, las mismas que afectan principalmente al sector generador de ingreso y empleo, lo que a su vez genera desincentivos en este sector. De esta manera, el Estado busca fijar óptimamente los objetivos de producción de cada sector sujeto a la restricción de ingresos que tiene.[36]

A su vez, se debe destacar que los ingresos provenientes del sector estratégico tienen como fuente no sólo los impuestos sino además el excedente económico que éste genera. Como se mencionó en el supuesto 11, el Estado mantendrá una política de presupuesto equilibrado de forma que los ingresos serán igual al gasto en cada momento, de esta forma la restricción de gasto del Estado redistribuidor estará dada por la siguiente expresión:

36 Es evidente que, en el marco del MESCP, el Estado captura una gran parte del excedente de la economía, luego lo utiliza como instrumento para impactar en ambos sectores a través del gasto. También, influye en ambos sectores a través de su participación activa como empresario. Al final, en base al supuesto 11, lo que interesa es encontrar el equilibrio dinámico del comportamiento de la producción de ambos sectores de la economía.

$$G = \theta_1 X_1 + \theta_2 X_2 \tag{8}$$

Donde $\theta_1 X_1 \equiv XE_1$ es el excedente económico generado en el sector estratégico. Por su parte, $0 < \theta_1 < 1$ y $0 < \theta_2 < 1 \in R^+$, y $\theta_2 X_2 \equiv XE_2$ es el excedente económico generado en el sector generador de ingreso y empleo que el Estado se apropia por la participación activa. Por tanto, el excedente económico generado, $XE_2 \geq \theta_2 X_2$, es mayor o igual a lo que el Estado recibe.

El proceso de optimización del Estado se resuelve con el método de Lagrange, por tanto:

$$L = X_1^{\alpha_1} X_2^{\alpha_2} - \lambda\left(-G + \theta_1 X_1 + \theta_2 X_2\right) \tag{9}$$

Derivando (9) respecto de X_1,

$$\frac{\partial L}{\partial X_1} = \alpha_1 X_1^{\alpha_1 - 1} X_2^{\alpha_2} - \lambda\theta_1 = 0 \tag{10}$$

Derivando (10) respecto de X_2,

$$\frac{\partial L}{\partial X_2} = \alpha_2 X_1^{\alpha_1} X_2^{\alpha_2 - 1} - \lambda\theta_2 = 0 \tag{11}$$

se encuentra la siguiente relación, la misma que es constante,[37]

$$\frac{X_2}{X_1} = \frac{\theta_1}{\theta_2}\frac{\alpha_2}{\alpha_1} \tag{12}$$

Por otro lado, los ingresos del Estado redistribuidor se pueden expresar de la siguiente forma:

37 No se puede encontrar el óptimo, porque se debe recordar que estas variables están en función del tiempo, pero si se utilizó la relación que generó parámetros constantes para todos los períodos de tiempo.

$$G \leq XE_1 + XE_2 \tag{13}$$

Encontrando la dinámica y aplicando los supuestos 2, 3, 5, 6 y 7 se tiene:

$$\frac{\dot{G}}{G} \leq -\frac{\gamma_1 \theta_1 X_1}{\theta_1 X_1 + \theta_2 X_2} + \frac{\beta_1 \theta_2 X_2}{\theta_1 X_1 + \theta_2 X_2} \tag{14}$$

Donde, $u = \frac{\theta_1 X_1}{\theta_1 X_1 + \theta_2 X_2}$ y $v = \frac{\theta_2 X_2}{\theta_1 X_1 + \theta_2 X_2}$, son los excedentes del sector estratégico y del sector generador de ingreso y empleo, respectivamente.

Así, se puede escribir:

$$\frac{\dot{G}}{G} \leq -\gamma_1 u + \beta_1 v \tag{15}$$

La ecuación (15) sugiere un impacto negativo del sector estratégico y un impacto positivo del sector generador de ingreso y empleo sobre el gasto del Estado.

La dinámica de u,[38] viene dada por:

$$\frac{\dot{u}}{u} = -a_3 + b_3 v - c_3 w \tag{16}$$

Aplicando el supuesto 13, la dinámica de v está representada por:

$$\frac{\dot{v}}{v} = a_2 - b_2 u \tag{17}$$

Siguiendo los supuestos 9 y 11 de presupuesto equilibrado, se tiene la siguiente dinámica

38 Para detalles, ver el Anexo 1.

$$\frac{\dot{D}}{D} \geq \frac{\dot{G}}{G} \tag{18}$$

En base al supuesto 8 se obtiene que la dinámica de la demanda interna es la siguiente:

$$\frac{\dot{D}}{D} \leq \frac{\dot{Y}}{Y} \tag{19}$$

Es decir: $\frac{\dot{Y}}{Y} \geq \frac{\dot{G}}{G}$

Por otro lado, considerando la igualdad de ingresos del Estado redistribuidor y encontrando las dinámicas, se tiene que si bien el ingreso del Estado depende del sector generador de ingreso y empleo, también la tasa de crecimiento de éste sector va a depender de la dinámica de los gastos del Estado.

$$\frac{\dot{X}_2}{X_2} = \left(1 + \frac{\alpha_1}{\alpha_2}\right)\left(\frac{\dot{G}}{G} + \frac{\alpha_1 \gamma_1}{\alpha_1 + \alpha_2}\right) \tag{20}$$

Utilizando (18) se tiene:

$$\frac{\dot{X}_2}{X_2} \leq \left(1 + \frac{\alpha_1}{\alpha_2}\right)\left(\frac{\dot{D}}{D} + \frac{\alpha_1 \gamma_1}{\alpha_1 + \alpha_2}\right) \tag{21}$$

Considerando que el sector generador de ingreso y empleo es fundamental, debido a que en éste se encuentra la manufactura (sector de valor agregado) se plantea la siguiente relación:

$$w = \frac{X_2}{Y} \tag{22}$$

Que representa la participación del sector generador de ingreso y empleo en el producto. Aplicando logaritmos neperianos y derivando se tiene:

$$\frac{\dot{w}}{w}=\frac{\dot{X}_2}{X_2}-\frac{\dot{Y}}{Y} \tag{23}$$

Reemplazando, ordenado y simplificando:

$$\frac{\dot{w}}{w}=-a_1+b_1v \tag{24}$$

Finalmente, el sector generador de ingreso y empleo va a depender del excedente económico del sector generador de ingreso y empleo.

Ordenando las ecuaciones para resolver, se encuentra, una buena aproximación del modelo matemático súper-predador, aunque no con la misma lógica:[39]

$$\begin{cases} \dot{v}=\left(a_2-b_2u\right)v \\ \dot{u}=\left(-a_3+b_3v-c_3w\right)u \\ \dot{w}=-\left(a_1-b_1v\right)w \end{cases} \tag{25}$$

Finalmente, se tiene el sistema de ecuaciones dinámicas (25), donde la primera fila representa la dinámica del excedente del sector generador de ingreso y empleo, la segunda fila constituye la dinámica del excedente del sector estratégico y la tercera ecuación expresa la dinámica de la participación del sector generador de ingreso y empleo en el producto.

Resolviendo el sistema de ecuaciones se encuentra un conjunto de puntos de equilibrio,[40] pero sólo se considera uno que es $X(t)=\left(\frac{a_1}{b_1},\frac{a_2}{b_2},-\frac{a_3}{c_3}+\frac{b_3a_1}{c_3b_1}\right)$, el cual

39 Es sumamente importante destacar que los parámetros del sistema de ecuaciones se generan a partir de variables agregadas y como no se modela al conjunto de actores en la economía desde un punto de vista microeconómico, este modelo matemático se encuentra dentro de los modelos macroeconómicos que tienen debilidad a la crítica de Lucas.

40 Las soluciones de equilibrio son:

$(0,0,0)$, $\left(\frac{a_3}{b_3},\frac{a_2}{b_2},0\right)$ y $\left(\frac{a_1}{b_1},\frac{a_2}{b_2},-\frac{a_3}{c_3}+\frac{b_3a_1}{c_3b_1}\right)$.

permite la interacción de las tres variables analizadas.[41] El equilibrio de la solución se obtiene mediante la matriz Jacobiana:

$$J = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{b_2 a_1}{b_1} & 0 \\ \frac{b_3 a_2}{b_2} & 0 & -\frac{c_3 a_2}{b_2} \\ \frac{b_1 a_3}{c_3} - \frac{b_3 a_1}{c_3} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Sus valores propios son:

$$\lambda_2 = -\frac{a_1 a_2 b_3}{3 b_1 A} + A \text{ y } \lambda_{1,3} = \frac{a_1 a_2 b_3}{6 b_2 A} - \frac{A}{2} \pm \frac{\sqrt{3}\left(\frac{a_1 a_2 b_3}{3 b_1 A} + A\right) i}{2}$$

donde

$$A = \left(\left(\frac{\left(\frac{b_3 a_1 a_2}{b_1}\right)^3}{27} + \frac{\left(a_1 a_2 \left(\frac{a_1 b_3}{b_1} - a_3\right)\right)^2}{4} \right)^{\frac{1}{2}} - \frac{a_1 a_2 \left(\frac{b_3 a_1}{b_1} - a_3\right)}{2} \right)^{\frac{1}{3}}$$

Por tanto, las soluciones serán funciones sinusoidales, las cuales fluctuarán en el tiempo.

41 Para más detalles ver Anexo 1.

c. Calibración del modelo

Para la calibración del modelo se consideraron los siguientes supuestos de los parámetros del sistema de ecuaciones:[42]

- $\alpha_1 = \alpha_2$, que significa que para el Estado las preferencias respecto a la producción de cada sector es la misma.
- $\tau_1 = \tau_2$, que implica que la participación del Estado y del sector privado en la generación del excedente total del sector generador de ingreso y empleo es la misma.
- $\theta_2 = h$, que significa que el impacto de la parte que recauda el Estado del sector X_2 es igual a la participación del excedente generado sobre el producto de la economía.
- Con estos tres supuestos de los parámetros se tiene:

$$a_1 = b_3 = \gamma_1$$

$$a_2 = \tau\left(\beta_0 + \sigma\right) + \frac{1}{2}\gamma_1$$

42

$$\begin{cases} a_1 = \gamma_1 \\ b_1 = \gamma_1 \dfrac{\alpha_1}{\alpha_2} - \tau_1\beta_0 - \tau_2\sigma = \gamma_1 - \tau\left(\beta_0 + \sigma\right) \\ a_2 = \tau_1\beta_0 + \tau_2\sigma + \gamma_1 \dfrac{\alpha_1}{\alpha_1 + \alpha_2} = \tau\left(\beta_0 + \sigma\right) + \dfrac{1}{2}\gamma_1 \\ b_2 = \left(\tau_1\beta_0 + \tau_2\sigma\right)\theta_2 \dfrac{1}{h}\dfrac{h}{\theta_2}\dfrac{\alpha_1}{\alpha_2} = \left(\tau_1\beta_0 + \tau_2\sigma\right)\dfrac{\alpha_1}{\alpha_2} = \tau\left(\beta_0 + \sigma\right) \\ a_3 = -\gamma_1 \dfrac{\alpha_1}{\alpha_2} = -\gamma_1 \\ b_3 = \gamma_1 \dfrac{\alpha_1}{\alpha_2} = \gamma_1 \\ c_3 = \left(\tau_1\beta_0 + \tau_2\sigma\right)\dfrac{\alpha_1}{\alpha_2}\dfrac{\theta_2}{h}\dfrac{\alpha_1}{\alpha_2} = \left(\tau_1\beta_0 + \tau_2\sigma\right)\left(\dfrac{\alpha_1}{\alpha_2}\right)^2 \dfrac{\theta_2}{h} = \tau\left(\beta_0 + \sigma\right) \end{cases}$$

$$a_3 = -\gamma_1$$

$$b_1 = \gamma_1 - \tau\left(\beta_0 + \sigma\right)$$

$$b_2 = c_3 = \tau\left(\beta_0 + \sigma\right)$$

Finalmente, considerando que el sistema de ecuaciones se basa en cuatro parámetros fundamentales (Cuadro 1):

Tabla 1: Parámetros fundamentales

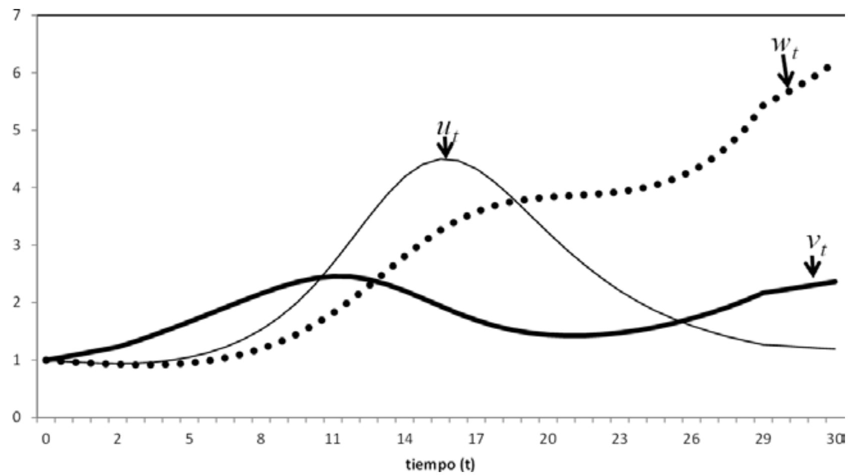
Parámetro	Descripción	Valor
γ_1	Tasa de decrecimiento del excedente del sector estratégico.	0.2
β_0	Tasa de crecimiento del excedente del sector generador de ingreso y empleo.	0.1
τ	Participación del Estado en el excedente generado en el sector generador de ingreso y empleo.	0.5
σ	Tasa de crecimiento del excedente que le pertenece al Estado (una constante definida y administrada por el Estado redistribuidor).	0.01

Realizando una pequeña simulación del sistema de ecuaciones, asignándole valores a los parámetros fundamentales[43] y encontrando la solución dinámica[44], las dinámicas que se obtienen son las siguientes:

43 Los parámetros del modelo son valores aproximados que permiten encontrar una solución numérica de los resultados del modelo. No obstante, se debe resaltar que los resultados son sensibles a variaciones en los parámetros, pudiendo cambiar fácilmente las dinámicas presentadas.

44 Ver Anexo 1.

Gráfico 1: Solución dinámica del Modelo Económico Social Comunitario Productivo



La primera línea gruesa representa el desenvolvimiento en el tiempo del excedente del sector generador de ingreso y empleo. La línea delgada muestra el desenvolvimiento en el tiempo del excedente del sector estratégico. La línea punteada representa la participación del sector de valor agregado en el producto. La simulación basada en los parámetros fundamentales muestra que el crecimiento del sector generador de ingreso y empleo tiene un ciclo de expansión y contracción, pero no es fluctuante. Mientras que el excedente del sector estratégico es creciente hasta cierto punto del tiempo debido al aumento en la explotación, seguido de un patrón descendente, debido a la limitación de los recursos naturales. En este marco, resalta la importancia de la participación del sector generador de valor agregado para promover un crecimiento sostenido de la economía, como un nuevo motor que impulsa la economía cuando se agotan los recursos naturales y disminuye el excedente del sector estratégico.

d. Estabilidad de los puntos de equilibrio

Es necesario testear si las soluciones encontradas para el modelo de ecuaciones diferenciales son estables. Derivando el sistema de ecuaciones respecto a v, u y w:[45]

45 Se denotará a $x(t)=\left(v(t),u(t),w(t)\right)$ como un vector de variables.

$$Df = \begin{pmatrix} a_2 - b_2 u & -b_2 v & 0 \\ b_3 u & -a_3 + b_3 v - c_3 w & -c_3 u \\ -b_1 w & 0 & -a_1 + b_1 v \end{pmatrix}$$

Para el punto de equilibrio $(0,0,0)$ y $\left(\frac{a_1}{b_1}, \frac{a_2}{b_2}, -\frac{a_3}{c_3} + \frac{b_3 a_1}{c_3 b_1}\right)$ se encontró que al ser la parte real de los valores propios imaginarios negativos,[46] se concluye que el punto de equilibrio es inestable en el tiempo. Esto implica que el equilibrio va cambiando en el tiempo, sin llegar a un estado estacionario.

En contraste, el punto de equilibrio $\left(\frac{a_3}{b_3}, \frac{a_2}{b_2}, 0\right)$ es localmente (neutralmente) estable[47], lo que implica que en el tiempo se llega a un óptimo de estado estacionario. Esto refleja que en ese momento del tiempo la economía estará

46 **Teorema:** Sea x^* un punto de equilibrio de $\dot{x} = f(x)$, con $f : R^n \to R^n$ de clase C^1. Entonces:

Si $Df(x^*)$ tiene todos los auto valores λ_j con parte real $Re(\lambda_j) < 0 \to x^*$ es localmente asintóticamente estable;

Si $\exists \lambda_j$ con parte real $Re(\lambda_j) > 0 \to x^*$ es inestable;

Si $Re(\lambda_j) \leq 0 \ \forall_j$ y $\exists \lambda_j$ con $Re(\lambda_j) = 0 \to$ no se puede decir nada.

47 Cabe hacer notar que para el segundo punto de equilibrio no se puede decir nada hasta que se pruebe con funciones de Liapunov. Planteando una función de Liapunov

$$V := a_2 b_3 v + a_3 b_2 u - a_3 a_2 ln(vu) + w^2,$$

el vector gradiente:

$$\nabla V\left(\frac{a_3}{b_3}, \frac{a_2}{b_2}, 0\right) = (0,0,0),$$

además,

$$\nabla^2 V = \begin{pmatrix} \frac{a_3 a_2}{v^2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{a_3 a_2}{u^2} & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \to \nabla^2 V\left(\frac{a_3}{b_3}, \frac{a_2}{b_2}, 0\right) = \begin{pmatrix} \frac{a_3 a_2}{\left(\frac{a_3}{b_3}\right)^2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{a_3 a_2}{\left(\frac{a_2}{b_2}\right)^2} & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

es una matriz definida positiva entonces V alcanza un mínimo local estricto en $\left(\frac{a_3}{b_3}, \frac{a_2}{b_2}, 0\right)$

en su punto de eficiencia, cabe aclarar que es un punto de equilibrio local no total.

En conclusión, el modelo matemático desarrollado en el presente documento alcanzará un estado estacionario, donde la economía estará en su óptimo. Esto se logra con la utilización del excedente de la economía por parte del Estado redistribuidor, quien inicialmente captura el excedente del sector estratégico y posteriormente captura parte del excedente económico del sector generador de ingreso y empleo. Este punto de equilibrio se considera un punto de eficiencia.

III. CONCLUSIÓN

Después de más de 20 años de vigencia del modelo neoliberal, el cual colocaba un excesivo énfasis en la capacidad de los mercados de autorregularse y negaba las características estructurales de Bolivia, el Modelo Económico Social Comunitario Productivo plantea una nueva visión sobre el funcionamiento de la economía boliviana y propone un set de políticas para generar altas tasas de crecimiento económico en el mediano y largo plazo.

El Modelo Económico Social Comunitario Productivo identifica la existencia de dos grandes sectores en la economía: un sector estratégico y un sector generador de empleos e ingresos. Adicionalmente se reconoce la importancia del Estado para que se alcance una distribución adecuada de los recursos y evitar la formación de monopolios en la economía. Dadas las características del sector estratégico, este estará controlado por el Estado, así, los excedentes del sector estratégico serán transferidos al sector generador de ingresos y empleo favoreciendo su participación y la industrialización del país. El gran potencial de la demanda interna permitirá desarrollar este sector hasta hacerlo competitivo respecto al resto del mundo y así alcanzar un crecimiento económico sostenido.

El modelo matemático genera un sistema de ecuaciones diferenciales tipo Lokta-Volterra cuya solución numérica muestra un crecimiento oscilatorio

Por último, $\frac{d}{dt}V\left(x(t)\right)=\nabla V\left(x(t)\right)*\dot{x}(t)=0$

$\therefore\left(\frac{a_3}{b_3},\frac{a_2}{b_2},0\right)$ es localmente (neutralmente) estable.

constante del sector generador de empleo e ingreso y un aumento del excedente económico a tasas crecientes. Claramente, el modelo matemático muestra la posibilidad teórica de generar crecimiento sostenido en economías de este tipo.

De esta manera, el Modelo Económico Social Comunitario Productivo visualiza al sector generador de ingreso y empleo como el principal sector que puede generar crecimiento sostenido en la economía. Debido a que el sector estratégico está controlado por el Estado redistribuidor, éste utiliza el excedente económico para industrializar y ampliar la base productiva del país, hecho que a su vez tiene un impacto considerable en el sector generador de ingreso y empleo. Otra parte de este excedente es relocalizado hacia el sector privado mediante mejoras de la demanda interna (por medio de políticas de trasferencias, políticas de mejoras salariales, etc.), lo que impulsa el mercado interno y genera movimiento en la economía permitiendo desarrollar el sector generador de ingreso y empleo.

En tanto la demanda interna quede insatisfecha fomentarla traerá crecimiento sostenido. A largo plazo cuando el sector generador de ingreso y empleo tenga suficiente capacidad para cubrir la demanda interna éste sector se convertirá en el nuevo motor de la economía boliviana.

Finalmente, la existencia de un punto de equilibrio de estado estacionario implica que el Modelo Económico Social Comunitario Productivo puede alcanzar un óptimo si el Estado interviene de forma activa y permanente en la economía mediante la transferencia de recursos de un sector a otro.

REFERENCIAS

Arce L. (2006). El Nuevo Modelo Económico, Social, Comunitario y Productivo. *Revista Economía Plural del Ministerio de Economía y Finanzas Públicas, Unidad de Comunicación Social, Bolivia*.

Arnold, V. (1992). Ordinary Differential Equations. *3rd Edition, Springer-Verlag*.

Bloem, A., Dippelsman, R., & Maehle, N., Quarterly National Accounts Manual: Concepts, Data Sources, and Compilation. *International Monetary Fund, 2001. http://www.imf.org/external/pubs/ft/qna/2000/Textbook/index.htm*

Boccara, N. (2010). Modeling Complex Systems: Second Edition. *Graduate Texts in Phisics, Springer Science+Business Media*.

Boukal, D., & Krivan, V. (1999). Lyapunov functions for Lotka-Volterra predator-prey models with optimal foraging behavior. *Journal of Mathematical Biology, 39,* 493-517.

Boyce, W., & DiPrima R. (2001). Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems, 7th Edition. *Wiley*.

Chauvet, E., Paullet, J., Previte, J., & Walls, Z. (2002). A Lokta-Volterra Three-species Food Chain. *The Behrend College, Penn State Erie*.

Gandolfo G. (1976). Métodos y Modelos Matemáticos de la dinámica económica. *Madrid, Editorial Tecnos S.A*.

Holling, C. (1959). Some characteristics of simple types of predation and parasitism. *Can. Ent., 91,* 385-395.

Hotelling, H. (1931). The economics of exhaustible resources. *The Journal of Political Economy, 39(2),* 137-175.

Krivan, V. (2011). On the Gause predator-prey model with a refuge: A fresh look at the history. *Journal of Theoretical Biology, 274,* 67-73.

Lotka, A. (1925). Elements of physical biology. *Williams & Wilkins Co*.

Ministerio de Planificación del Desarrollo (2006). Plan Nacional de Desarrollo. *Bolivia*.

Villegas C., & Aguirre A. (1989). Excedente y acumulación en Bolivia: 1980 – 1987. *CEDLA, Bolivia*.

Volterra V. (1926). Fluctuations in the abundance of a species considered mathematically. *Nature, 118,* 558-560.

ANEXO 1.
DEMOSTRACIONES MATEMÁTICAS

Demostración del modelo

Se parte de la función,

$$U\left(X_1, X_2\right) = X_1^{\alpha_1} X_2^{\alpha_2} \tag{1}$$

Sujeto a restricción,

$$G = \theta_1 X_1 + \theta_2 X_2 \tag{2}$$

El método de los multiplicadores de Lagrange, utilizando (1) y (2),

$$L = X_1^{\alpha_1} X_2^{\alpha_2} - \lambda\left(-G + \theta_1 X_1 + \theta_2 X_2\right) \tag{3}$$

De la ecuación (3) derivando respecto de X_1 he igualando a cero,

$$\frac{\partial L}{\partial X_1} = \alpha_1 X_1^{\alpha_1 - 1} X_2^{\alpha_2} - \lambda\theta_1 = 0 \tag{4}$$

De la ecuación (3) derivando respecto de X_2 he igualando a cero,

$$\frac{\partial L}{\partial X_2} = \alpha_2 X_1^{\alpha_1} X_2^{\alpha_2 - 1} - \lambda\theta_2 = 0 \tag{5}$$

Resolviendo el sistema de las ecuaciones (4) y (5) se encontró la siguiente relación de ambos sectores,

$$\frac{X_2}{X_1} = \frac{\alpha_2}{\alpha_1}\frac{\theta_1}{\theta_2} \tag{6}$$

Utilizando los supuestos 6 y 7 dado que $XE_1 = a_0 e^{-\gamma_1 t}$ y $XE_2 = \left[XE_2^p\right]^{\tau_1}\left[XE_2^e\right]^{\tau_2}$, donde las dinámicas son: $\frac{\dot{X}E_1}{XE_1} = -\gamma_1$ y $\frac{\dot{X}E_2}{XE_2} = \tau_1\beta_0 + \tau_2\sigma = \beta_1$

También es importante: $XE_1 \equiv \theta_1 X_1$ y $XE_2 \le \theta_2 X_2$, en consecuencia, y utilizando ecuación (2)

$$G \le \theta_1 X_1 + \theta_2 X_2 \equiv XE_1 + XE_2 \tag{7}$$

Encontrando la dinámica en el tiempo de la ecuación (7),

$$\dot{G} \le \dot{X}E_1 + \dot{X}E_2 \tag{8}$$

Dividiendo entre G la ecuación (8), se tiene,

$$\frac{\dot{G}}{G} \le \frac{\dot{X}E_1}{G} + \frac{\dot{X}E_2}{G} \tag{9}$$

Usando un artificio matemático en (9),

$$\begin{gathered}\frac{\dot{G}}{G} \le \frac{\frac{\dot{X}E_1}{XE_1}}{\frac{G}{XE_1}} + \frac{\frac{\dot{X}E_2}{XE_2}}{\frac{G}{XE_2}} = \frac{-\gamma_1}{G}XE_1 + \frac{\beta_1}{G}XE_2 = \\ -\gamma_1 \frac{XE_1}{XE_1 + XE_2} + \beta_1 \frac{XE_2}{XE_1 + XE_2} = -\gamma_1 u + \beta_1 v\end{gathered} \tag{10}$$

Encontrando la dinámica,

$$u = \frac{XE_1}{XE_1 + XE_2} = \frac{XE_1}{G} \tag{11}$$

Aplicando logaritmos a (11),

$$ln(u) = ln(XE_1) - ln(G) \qquad (12)$$

Derivando en el tiempo la ecuación (12),

$$\frac{\dot{u}}{u} = \frac{\dot{XE_1}}{XE_1} - \frac{\dot{G}}{G} \qquad (13)$$

Reemplazando (6) y (11) y usando artificios matemáticos,

$$\begin{aligned}
&\frac{\dot{u}}{u} = -\gamma_1 - \left(-\gamma_1 u + \beta_1 v\right) = -\gamma_1 + \gamma_1 \frac{XE_1}{XE_1 + XE_2} - \beta_1 v = \\
&-\gamma_1 + \gamma_1 \frac{XE_1 XE_2}{\left(XE_1 + XE_2\right) XE_2} - \beta_1 v = -\gamma_1 + \frac{XE_1}{XE_2} v - \beta_1 v = \\
&-\gamma_1 + \gamma_1 \frac{\theta_1 X_1}{\theta_2 X_2} v - \beta_1 v = -\gamma_1 + \gamma_1 \frac{\alpha_1}{\alpha_2} v - \beta_1 v = -\underbrace{\gamma_1}_{f_1} + \left(\underbrace{\gamma_1 \frac{\alpha_1}{\alpha_2} - \beta_1}_{g_1}\right) v
\end{aligned} \qquad (14)$$

Finalmente,

$$\dot{u} = \left(-f_1 + g_1 v\right) u = -\left(f_1 - g_1 v\right) u \qquad (15)$$

Encontrando la dinámica,

$$v = \frac{XE_2}{G} \qquad (16)$$

Aplicando logaritmos a (16),

$$ln(v) = ln(XE_2) - ln(G) \tag{17}$$

Derivando en el tiempo (17),

$$\frac{\dot{v}}{v} = \frac{\dot{XE}_2}{XE_2} - \frac{\dot{G}}{G} \tag{18}$$

Reemplazando (6) y $w = \frac{X_2}{Y}$, con algunos artificios matemáticos,

$$\begin{aligned} &\frac{\dot{v}}{v} = \beta_1 - (-\gamma_1 u + \beta_1 v) = \beta_1 - \left(-\gamma_1 u + \beta_1 v \frac{Y}{Y}\right) = \beta_1 - \left(-\gamma_1 \frac{XE_1}{XE_1 + XE_2} + \beta_1 \frac{XE_2}{XE_1 + XE_2} \frac{Y}{Y}\right) = \\ &\beta_1 - \left(-\gamma_1 \frac{1}{1 + \frac{XE_2}{XE_1}} + \beta_1 \frac{\theta_2 X_2}{XE} \frac{Y}{Y}\right) = \beta_1 - \left(-\gamma_1 \frac{1}{1 + \frac{XE_2}{XE_1}} + \beta_1 \frac{\theta_2 Y}{XE} w\right) = \beta_1 - \left(-\gamma_1 \frac{1}{1 + \frac{\alpha_2}{\alpha_1}} + \beta_1 \frac{\theta_2 Y}{XE} w\right) = \\ &\beta_1 - \left(-\gamma_1 \frac{\alpha_1}{\alpha_1 + \alpha_2} + \beta_1 \theta_2 \frac{1}{h} w\right) = \underbrace{\beta_1 + \gamma_1 \frac{\alpha_1}{\alpha_1 + \alpha_2}}_{f_2} - \underbrace{\beta_1 \theta_2 \frac{1}{h}}_{g_2} w \end{aligned} \tag{19}$$

Finalmente de (19),

$$\dot{v} = (f_2 - g_2 w) v \tag{20}$$

En conclusión encontrando la dinámica para w

$$w = \frac{X_2}{Y} \tag{21}$$

Aplicando logaritmo neperiano y derivando en el tiempo a la ecuación (21),

$$\frac{\dot{w}}{w}=\frac{\dot{X}_2}{X_2}-\frac{\dot{Y}}{Y} \tag{22}$$

Otra vez, partiendo de G, con algún cambio

$$G = XE_1+\theta_2 X_2 \tag{23}$$

Derivando en el tiempo la ecuación (23),

$$\dot{G}=\dot{XE}_1+\theta_2\,\dot{X}_2 \tag{24}$$

Dividiendo entre G la ecuación (24) y realizando artificios matemáticos

$$\begin{aligned}\frac{\dot{G}}{G}&=\frac{\frac{\dot{XE}_1}{XE_1}}{\frac{G}{XE_1}}+\frac{\theta_2\frac{\dot{X}_2}{X_2}}{\frac{G}{X_2}}=\frac{-\gamma_1\alpha_1}{\alpha_1+\alpha_2}+\frac{\theta_2}{\frac{\theta_1 X_1}{X_2}+\frac{\theta_2 X_2}{X_2}}\frac{\dot{X}_2}{X_2}=\frac{-\gamma_1\alpha_1}{\alpha_1+\alpha_2}+\frac{\theta_2}{\frac{\theta_1\theta_2\alpha_1}{\theta_1\alpha_2}+\theta_2}\frac{\dot{X}_2}{X_2}=\\ &\frac{-\gamma_1\alpha_1}{\alpha_1+\alpha_2}+\frac{\theta_2}{\frac{\theta_2\alpha_1}{\alpha_2}+\theta_2}\frac{\dot{X}_2}{X_2}=\frac{-\gamma_1\alpha_1}{\alpha_1+\alpha_2}+\frac{1}{\frac{\alpha_1}{\alpha_2}+1}\frac{\dot{X}_2}{X_2}=\frac{-\gamma_1\alpha_1}{\alpha_1+\alpha_2}+\frac{\alpha_2}{\alpha_1+\alpha_2}\frac{\dot{X}_2}{X_2}\end{aligned} \tag{25}$$

Despejando X_2 de la ecuación (25),

$$\frac{\dot{X}_2}{X_2}=\frac{\alpha_1+\alpha_2}{\alpha_2}\left(\frac{\gamma_1\alpha_1}{\alpha_1+\alpha_2}+\frac{\dot{G}}{G}\right)=\frac{\alpha_1+\alpha_2}{\alpha_2}\left(\frac{\gamma_1\alpha_1}{\alpha_1+\alpha_2}+\frac{\dot{G}}{G}\right) \tag{26}$$

Siguiendo el razonamiento $D \geq G$ y $\frac{D}{Y} = d$ se tiene que:

$$\frac{\dot{D}}{D} \geq \frac{\dot{G}}{G} \text{ y } \frac{\dot{D}}{D} = \frac{\dot{Y}}{Y},$$

En consecuencia $\frac{\dot{Y}}{Y} \geq \frac{\dot{G}}{G}$ o que es lo mismo,

$$\frac{\dot{G}}{G} \leq \frac{\dot{Y}}{Y} \tag{27}$$

Considerando la holgura de ciertas desigualdades, se resuelve para la igualdad.

Reemplazando X_2 y Y de las ecuaciones (26) y (27),

$$\begin{aligned}\frac{\dot{w}}{w} &= \left(1+\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\right)\left(\frac{\dot{G}}{G}+\frac{\alpha_1\gamma_1}{\alpha_1+\alpha_2}\right)-\frac{\dot{G}}{G} = \frac{\alpha_1+\alpha_2}{\alpha_2}\frac{\dot{G}}{G}+\frac{\gamma_1\alpha_1}{\alpha_2}-\frac{\dot{G}}{G} = \frac{\gamma_1\alpha_1}{\alpha_2}+\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\frac{\dot{G}}{G} = \\ &\frac{\gamma_1\alpha_1}{\alpha_2}+\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\left(-\gamma_1 u+\beta_1 v\right) = \underbrace{\frac{\gamma_1\alpha_1}{\alpha_2}}_{\uparrow\, -f_3} - \underbrace{\gamma_1\frac{\alpha_1}{\alpha_2}}_{\uparrow\, g_3} u + \underbrace{\beta_1\frac{\alpha_1}{\alpha_2}}_{\uparrow\, h_3} v\end{aligned} \tag{28}$$

Finalmente de la ecuación (28),

$$\frac{\dot{w}}{w} = -f_3 + g_3 v - h_3 u \tag{29}$$

Entonces de la ecuación (29),

$$\dot{w} = \left(-a_3 + b_3 v - c_3 u\right) w \tag{30}$$

El sistema de ecuaciones dinámicas comprende las ecuaciones (20), (30) y (15), respectivamente,

$$\begin{cases} \dot{v} = \left(f_2 - g_2 w\right) v \\ \dot{w} = \left(-f_3 + g_3 v - h_3 u\right) w \\ \dot{u} = -\left(f_1 - g_1 v\right) u \end{cases} \tag{31}$$

Adicionalmente, se puede mostrar que,

$$w = \frac{X_2}{Y} = \frac{\theta_2 X_2}{\theta_2 Y}\frac{XE_1}{XE}\frac{XE}{XE_1} = \frac{h\alpha_2}{\theta_2 \alpha_1} u \rightarrow \frac{\theta_2}{h}\frac{\alpha_1}{\alpha_2} w = u$$

Aplicando logaritmos y derivando en el tiempo,

$$\frac{\dot{w}}{w} = \frac{\dot{u}}{u}$$

El sistema se transforma en,

$$\begin{cases} \dot{v} = \left(\underbrace{f_2}_{a_2} - \underbrace{g_2 \frac{h\alpha_2}{\theta_2 \alpha_1}}_{b_2} u \right) v \\ \dot{u} = \left(-\underbrace{f_3}_{a_3} + \underbrace{g_3}_{b_3} v - \underbrace{h_3 \frac{\theta_2}{h}\frac{\alpha_1}{\alpha_2}}_{c_3} w \right) u \\ \dot{w} = -\left(\underbrace{f_1}_{a_1} - \underbrace{g_1}_{b_1} v \right) w \end{cases} \tag{32}$$

Transformando variables convenientemente,

$$\begin{cases} \dot{v} = \left(a_2 - b_2 u\right) v \\ \dot{u} = \left(-a_3 + b_3 v - c_3 w\right) u \\ \dot{w} = -\left(a_1 - b_1 v\right) w \end{cases} \tag{33}$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones dinámicas (33), encontrando las soluciones del sistema homogéneo,

$$\begin{cases} \left(a_2 - b_2 u\right) v = 0 \\ \left(-a_3 + b_3 v - c_3 w\right) u = 0 \\ -\left(a_1 - b_1 v\right) w = 0 \end{cases} \tag{34}$$

Resolviendo por sustitución, para (34),

$$a_2 - b_2 u = 0 \rightarrow u = \frac{a_2}{b_2} \tag{35}$$

y,

$$-a_1 + b_1 v = 0 \rightarrow v = \frac{a_1}{b_1} \tag{36}$$

Reemplazando (35) en (36),

$$-a_3 + b_3 \frac{a_1}{b_1} = c_3 w \rightarrow w = \frac{-a_3}{c_3} + \frac{a_1 b_3}{b_1 c_3} \tag{37}$$

Al ser un sistema de grado superior y de acuerdo al teorema fundamental del álgebra se encuentra tres soluciones.

Los puntos de equilibrio son:

$$(0,0,0),\ \left(\frac{a_3}{b_3},\frac{a_2}{b_2},0\right) \text{ y } \left(\frac{a_1}{b_1},\frac{a_2}{b_2},-\frac{a_3}{c_3}+\frac{b_3a_1}{c_3b_1}\right).$$

Derivando el sistema de ecuaciones (34), (35) y (36), se tiene la siguiente matriz jacobiana,

$$Df=\begin{pmatrix} a_2-b_2u & -b_2v & 0 \\ b_3u & -a_3+b_3v-c_3w & -c_3u \\ -b_1w & 0 & -a_1+b_1v \end{pmatrix} \tag{38}$$

Reemplazando para $(0,0,0)$ en (38),

$$Df(0,0,0)=\begin{pmatrix} a_2 & 0 & 0 \\ 0 & -a_3 & 0 \\ 0 & 0 & -a_1 \end{pmatrix} \tag{39}$$

Reemplazando para $\left(\frac{a_3}{b_3},\frac{a_2}{b_2},0\right)$ en (38),

$$Df\left(\frac{a_3}{b_3},\frac{a_2}{b_2},0\right)=\begin{pmatrix} 0 & -\frac{b_2a_3}{b_3} & 0 \\ \frac{b_3a_2}{b_2} & 0 & -\frac{c_3a_2}{b_2} \\ 0 & 0 & -a_1+\frac{b_1a_3}{b_3} \end{pmatrix} \tag{40}$$

Reemplazando para $\left(\frac{a_1}{b_1},\frac{a_2}{b_2},-\frac{a_3}{c_3}+\frac{b_3a_1}{c_3b_1}\right)$ en (38),

$$Df\left(\frac{a_1}{b_1},\frac{a_2}{b_2},-\frac{a_3}{c_3}+\frac{b_3a_1}{c_3b_1}\right)=\begin{pmatrix} 0 & -\frac{b_2a_1}{b_1} & 0 \\ \frac{b_3a_2}{b_2} & 0 & -\frac{c_3a_2}{b_2} \\ \frac{b_1a_3}{c_3}-\frac{b_3a_1}{c_3} & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{41}$$

Para cada punto de equilibrio se puede encontrar la solución del sistema dinámico,

La solución para el $(0,0,0)$

$$v(t)=c_1e^{a_2t}\ ,\ w(t)=c_2e^{-a_3t}\ ,\ u(t)=c_3e^{-a_1t} \tag{42}$$

La solución para $\left(\frac{a_1}{b_1},\frac{a_2}{b_2},-\frac{a_3}{c_3}+\frac{b_3a_1}{c_3b_1}\right)$,

Primero se encuentra sus valores propios, que son:

$$\lambda_1=-\frac{a_1a_2b_3}{3b_1A}+A \ \text{ y } \ \lambda_{2,3}=\frac{a_1a_2b_3}{6b_1A}-\frac{A}{2}\pm\frac{\sqrt{3}\left(\frac{a_1a_2b_3}{3b_1A}+A\right)i}{2}$$

donde

$$A=\left(\left(\frac{\left(\frac{b_3a_1a_2}{b_1}\right)^3}{27}+\frac{\left(a_1a_2\left(\frac{b_3c_3}{b_1}-a_3\right)\right)^2}{4}\right)^{\frac{1}{2}}-\frac{a_1a_2\left(\frac{b_3c_3}{b_1}-a_3\right)}{2}\right)^{\frac{1}{3}}$$

Para facilitar el trabajo, se utilizó la siguiente notación, donde Z es

$$Z=\frac{\sqrt{3}\left(\left(\frac{\left(a_2a_1^2b_3-a_1a_2a_3b_1\right)^2}{4b_1^2}+\frac{a_1^3a_2^3b_3^3}{27b_1}\right)^{\frac{1}{2}}-\frac{a_2a_1^2b_3-a_1a_2a_3b_1}{2b_1}\right)^{\frac{1}{3}}+\frac{a_1a_2b_3}{3b_1\left(\left(\frac{\left(a_2a_1^2b_3-a_1a_2a_3b_1\right)^2}{4b_1^2}+\frac{a_1^3a_2^3b_3^3}{27b_1}\right)^{\frac{1}{2}}-\frac{a_2a_1^2b_3-a_1a_2a_3b_1}{2b_1}\right)^{\frac{1}{3}}}}{2}i \tag{43}$$

Por otra parte X

$$X=-\frac{\left(\left(\frac{\left(a_2a_1^2b_3-a_1a_2a_3b_1\right)^2}{4b_1^2}+\frac{a_1^3a_2^3b_3^3}{27b_1}\right)^{\frac{1}{2}}-\frac{a_2a_1^2b_3-a_1a_2a_3b_1}{2b_1}\right)^{\frac{1}{3}}}{2}+\frac{a_1a_2b_3}{6b_1\left(\left(\frac{\left(a_2a_1^2b_3-a_1a_2a_3b_1\right)^2}{4b_1^2}+\frac{a_1^3a_2^3b_3^3}{27b_1}\right)^{\frac{1}{2}}-\frac{a_2a_1^2b_3-a_1a_2a_3b_1}{2b_1}\right)^{\frac{1}{3}}} \tag{44}$$

La matriz de auto valores usando la ecuación (43) y (44),

$$\begin{pmatrix} X+Zi & 0 & 0 \\ 0 & Z & 0 \\ 0 & 0 & X-Zi \end{pmatrix} \tag{45}$$

Los vectores propios son:

$$V_1=\begin{pmatrix} -\frac{c_3\left(X+Zi\right)}{a_1b_3-a_3b_1} \\ \frac{b_1c_3\left(X+Zi\right)^2}{a_1^2b_2b_3-a_1a_3b_1b_2} \\ 1 \end{pmatrix}\quad V_2=\begin{pmatrix} -\frac{c_3Z}{a_1b_3-a_3b_1} \\ \frac{b_1c_3\left(Z\right)^2}{a_1^2b_2b_3-a_1a_3b_1b_2} \\ 1 \end{pmatrix}\quad V_3=\begin{pmatrix} \frac{c_3\left(X+Zi\right)}{a_1b_3-a_3b_1} \\ \frac{b_1c_3\left(X+Zi\right)^2}{a_1^2b_2b_3-a_1a_3b_1b_2} \\ 1 \end{pmatrix} \tag{46}$$

Al ser soluciones complejas se trabajaron tanto para la parte real como para la imaginaria,

$$Re\left\{Ve^{\lambda t}\right\},\ Im\left\{Ve^{\lambda t}\right\} \tag{47}$$

Para V_1, se realizó la solución aplicando la fórmula de Euler,

$$Re\left\{V_1 e^{\lambda t}\right\} = Re\left\{\begin{pmatrix} -\dfrac{c_3\left(X+Zi\right)}{a_1b_3-a_3b_1} \\ \dfrac{b_1c_3\left(X+Zi\right)^2}{a_1^2b_2b_3-a_1a_3b_1b_2} \\ 1 \end{pmatrix} e^{(X+Zi)t}\right\} =$$

$$e^{Xt}Re\left\{\begin{pmatrix} -\dfrac{c_3\left(X+Zi\right)}{a_1b_3-a_3b_1} \\ \dfrac{b_1c_3\left(X+Zi\right)^2}{a_1^2b_2b_3-a_1a_3b_1b_2} \\ 1 \end{pmatrix} \left(cos\left(Zt\right)+isen\left(Zt\right)\right)\right\} = \tag{48}$$

$$e^{Xt}\begin{pmatrix} \dfrac{-c_3X}{a_1b_3-a_3b_1}\left(cos\left(Zt\right)+sen\left(Zt\right)\right) \\ \dfrac{b_1c_3}{a_1^2b_2b_3-a_1a_3b_1b_2}\left(X^2cos\left(Zt\right)-Z^2cos\left(Zt\right)-2XZsen\left(Zt\right)\right) \\ cos\left(Zt\right) \end{pmatrix}$$

$$Im\left\{V_1 e^{\lambda t}\right\} = Im\left\{\begin{pmatrix} -\dfrac{c_3\left(X+Zi\right)}{a_1b_3 - a_3b_1} \\ \dfrac{b_1c_3\left(X+Zi\right)^2}{a_1^2b_2b_3 - a_1a_3b_1b_2} \\ 1 \end{pmatrix} e^{\left(X+Zi\right)t}\right\} =$$

$$e^{Xt} Im\left\{\begin{pmatrix} -\dfrac{c_3\left(X+Zi\right)}{a_1b_3 - a_3b_1} \\ \dfrac{b_1c_3\left(X+Zi\right)^2}{a_1^2b_2b_3 - a_1a_3b_1b_2} \\ 1 \end{pmatrix}\left(cos\left(Zt\right) + isen\left(Zt\right)\right)\right\} = \qquad (49)$$

$$e^{Xt}\begin{pmatrix} \dfrac{-c_3Z}{a_1b_3 - a_3b_1}\left(cos\left(Zt\right) + sen\left(Zt\right)\right) \\ \dfrac{b_1c_3}{a_1^2b_2b_3 - a_1a_3b_1b_2}\left(2XZcos\left(Zt\right) - X^2sen\left(Zt\right) - Z^2sen\left(Zt\right)\right) \\ sen\left(Zt\right) \end{pmatrix}$$

Para V_2

$$Re\left\{V_2 e^{\lambda t}\right\} = Re\left\{\begin{pmatrix} -\dfrac{c_3 Z}{a_1 b_3 - a_3 b_1} \\ \dfrac{b_1 c_3 (Z)^2}{a_1^2 b_2 b_3 - a_1 a_3 b_1 b_2} \\ 1 \end{pmatrix} e^{Zt}\right\} =$$

$$e^{Zt} Re\left\{\begin{pmatrix} -\dfrac{c_3 Z}{a_1 b_3 - a_3 b_1} \\ \dfrac{b_1 c_3 (Z)^2}{a_1^2 b_2 b_3 - a_1 a_3 b_1 b_2} \\ 1 \end{pmatrix}\right\} = \tag{50}$$

$$e^{Xt} \begin{pmatrix} -\dfrac{c_3 Z}{a_1 b_3 - a_3 b_1} \\ \dfrac{b_1 c_3 (Z)^2}{a_1^2 b_2 b_3 - a_1 a_3 b_1 b_2} \\ 1 \end{pmatrix}$$

Para V_3

$$Re\left\{V_3 e^{\lambda t}\right\} = Re\left\{\begin{pmatrix} -\dfrac{c_3\left(X - Zi\right)}{a_1 b_3 - a_3 b_1} \\ \dfrac{b_1 c_3\left(X - Zi\right)^2}{a_1^2 b_2 b_3 - a_1 a_3 b_1 b_2} \\ 1 \end{pmatrix} e^{\left(X - Zi\right)t}\right\} =$$

$$e^{Xt} Re\left\{\begin{pmatrix} -\dfrac{c_3\left(X - Zi\right)}{a_1 b_3 - a_3 b_1} \\ \dfrac{b_1 c_3\left(X - Zi\right)^2}{a_1^2 b_2 b_3 - a_1 a_3 b_1 b_2} \\ 1 \end{pmatrix}\left(cos\left(Zt\right) - isen\left(Zt\right)\right)\right\} = \tag{51}$$

$$e^{Xt}\begin{pmatrix} \dfrac{c_3}{a_1 b_3 - a_3 b_1}\left(-Xcos\left(Zt\right) + Zsen\left(Zt\right)\right) \\ \dfrac{b_1 c_3}{a_1^2 b_2 b_3 - a_1 a_3 b_1 b_2}\left(X^2 cos\left(Zt\right) - Z^2 cos\left(Zt\right) - 2XZsen\left(Zt\right)\right) \\ cos\left(Zt\right) \end{pmatrix}$$

$$Im\left\{V_3 e^{\lambda t}\right\} = Im\left\{\begin{pmatrix} -\frac{c_3\left(X-Zi\right)}{a_1b_3-a_3b_1} \\ \frac{b_1c_3\left(X-Zi\right)^2}{a_1^2b_2b_3-a_1a_3b_1b_2} \\ 1 \end{pmatrix} e^{\left(X-Zi\right)t}\right\} =$$

$$e^{Xt} Im\left\{\begin{pmatrix} -\frac{c_3\left(X-Zi\right)}{a_1b_3-a_3b_1} \\ \frac{b_1c_3\left(X-Zi\right)^2}{a_1^2b_2b_3-a_1a_3b_1b_2} \\ 1 \end{pmatrix}\left(cos\left(Zt\right)-isen\left(Zt\right)\right)\right\} = \tag{52}$$

$$e^{Xt}\begin{pmatrix} \frac{c_3}{a_1b_3-a_3b_1}\left(Zcos\left(Zt\right)-Xsen\left(Zt\right)\right) \\ \frac{b_1c_3}{a_1^2b_2b_3-a_1a_3b_1b_2}\left(-2XZcos\left(Zt\right)-X^2sen\left(Zt\right)+Z^2sen\left(Zt\right)\right) \\ sen\left(Zt\right) \end{pmatrix}$$

Finalmente las soluciones del sistema dinámico de ecuaciones son:

$$\begin{pmatrix} v(t) \\ w(t) \\ u(t) \end{pmatrix} = e^{Xt} \left[\begin{array}{l} C_1 \begin{pmatrix} \frac{-c_3 X}{a_1 b_3 - a_3 b_1}\left(cos(Zt) + sen(Zt)\right) \\ \frac{b_1 c_3}{a_1^2 b_2 b_3 - a_1 a_3 b_1 b_2}\left(X^2 cos(Zt) - Z^2 cos(Zt) - 2XZsen(Zt)\right) \\ cos(Zt) \end{pmatrix} + \\ C_2 \begin{pmatrix} \frac{-c_3 Z}{a_1 b_3 - a_3 b_1}\left(cos(Zt) + sen(Zt)\right) \\ \frac{b_1 c_3}{a_1^2 b_2 b_3 - a_1 a_3 b_1 b_2}\left(2XZcos(Zt) - X^2 sen(Zt) - Z^2 sen(Zt)\right) \\ sen(Zt) \end{pmatrix} + \\ C_3 \begin{pmatrix} -\frac{c_3 Z}{a_1 b_3 - a_3 b_1} \\ \frac{b_1 c_3 (Z)^2}{a_1^2 b_2 b_3 - a_1 a_3 b_1 b_2} \\ 1 \end{pmatrix} + \\ C_4 \begin{pmatrix} \frac{c_3}{a_1 b_3 - a_3 b_1}\left(-Xcos(Zt) + Zsen(Zt)\right) \\ \frac{b_1 c_3}{a_1^2 b_2 b_3 - a_1 a_3 b_1 b_2}\left(X^2 cos(Zt) - Z^2 cos(Zt) - 2XZsen(Zt)\right) \\ cos(Zt) \end{pmatrix} + \\ C_5 \begin{pmatrix} \frac{c_3}{a_1 b_3 - a_3 b_1}\left(Zcos(Zt) - Xsen(Zt)\right) \\ \frac{b_1 c_3}{a_1^2 b_2 b_3 - a_1 a_3 b_1 b_2}\left(-2XZcos(Zt) - X^2 sen(Zt) + Z^2 sen(Zt)\right) \\ sen(Zt) \end{pmatrix} \end{array} \right]$$

Donde C_1, C_2, C_3, C_4 y C_5 son constantes.

ANEXO 2.
PROGRAMACIÓN EN MATLAB

```
function nmodecoscp
% Sistema de ecuaciones diferenciales
function xdot = vdpol(t,x)
xdot=zeros(3,1);
xdot(1)=0.155.*x(1)-0.055.*x(2).*x(1);
xdot(2)=-.2.*x(2)+0.2.*x(1).*x(2)-.055.*x(2).*x(3);
xdot(3)=-0.2.*x(3)+0.145.*x(1).*x(3);
end
t0=0; tf=30;
x0=[1 1 1]';
[t,x]=ode45({vdpol,[t0 tf],x0);
t,x
% Gráfico
hFig=figure(1);
set(hFig,'Position',[500 400 900 500])
plot(t,x);
hline=findobj(gcf,'type','line');
set(hline(1),'LineWidth',1.5,'LineStyle',':')
set(hline(3),'LineWidth',2)
legend_h=legend('XXX','YYY','ZZZ','Location','Best');
set(legend_h,'Interpreter','latex','string',{'Excedente del sector generador de ingreso y empleo (${v_t}$)','Excedente del sector estrat$\acute{e}$gico (${u_t}$)','Participaci$\acute{o}$n del sector generador de ingreso y empleo en el producto (${w_t}$)'});
xlabel('tiempo (t)')
end
```